Романюк В.В.
Хмельницький національний університет,
м. Хмельницький, Україна

РЕГУЛЯРНА ОПТИМАЛЬНА СТРАТЕГІЯ ПРОЕКТУВАЛЬНИКА У МОДЕЛІ ДІЇ НОРМОВАНОГО ОДИНИЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ НА N-КОЛОННУ БУДІВЕЛЬНУ КОНСТРУКЦІЮ-ОПОРУ

Вступ і постановка проблеми дослідження

На сьогодні одна з фундаментальних моделей оптимального використання будівельних ресурсів в конструкціях-опорах як антагоністична модель дії нормованого одиничного навантаження (МДНОН) [1] на двоколонну будівельну конструкцію узагальнена для триколонної опори [2, 3]. У цих моделях мінімізується максимальний дисбаланс відношень стискаючих зусиль до квадратів площ поперечних перерізів. Розглянуті моделі можна узагальнити для N-колонної конструкції-опори, де $N \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Крім того, якщо брати відношення довільних степенів стискаючих зусиль і площ поперечних перерізів, то буде змодельовано узагальнену проблему усунення N часткових невизначеностей за допомогою мінімізації максимального дисбалансу.

Аналіз останніх досліджень й окреслення невирішеного питання

Узагальнена проблема усунення N часткових невизначеностей за допомогою мінімізації максимального дисбалансу, частинним випадком якої буде МДНОН на N-колонну конструкцію-опору, полягає у знаходженні оптимальної стратегії другого гравця (проектувальника) в антагоністичній грі з ядром як гіперповерхнею [4]

$$T(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = T(x_1, x_2, \mathbf{K}, x_{N-1}; y_1, y_2, \mathbf{K}, y_{N-1}) =$$

$$= \alpha \max \left\{ \frac{x_1^m}{y_1^n}, \frac{x_2^m}{y_2^n}, \mathbf{K}, \frac{x_{N-1}^m}{y_{N-1}^n}, \frac{\left(1 - \sum\limits_{k=1}^{N-1} x_k\right)^m}{\left(1 - \sum\limits_{k=1}^{N-1} y_k\right)^n} \right\} = \alpha \max \left\{ \left\{ \frac{x_j^m}{y_j^n} \right\}_{j=1}^{N-1}, \frac{\left(1 - \sum\limits_{k=1}^{N-1} x_k\right)^m}{\left(1 - \sum\limits_{k=1}^{N-1} y_k\right)^n} \right\} \quad (1)$$

з параметром $\alpha > 0$ й $m > 0$, $n > 0$ на паралелепіпеді

$$\boldsymbol{x} \quad \times \boldsymbol{Y} \quad = \left\{ \prod_{j=1}^{N-1} X_j \right\} \times \left\{ \prod_{k=1}^{N-1} Y_k \right\} = \left\{ \prod_{j=1}^{N-1} [a_j; b_j] \right\} \times \left\{ \prod_{k=1}^{N-1} [a_k; b_k] \right\} \subset$$

$$\subset \left\{ \prod_{j=1}^{N-1} (0; 1) \right\} \times \left\{ \prod_{k=1}^{N-1} (0; 1) \right\} \subset \left\{ \prod_{j=1}^{N-1} [0; 1] \right\} \times \left\{ \prod_{k=1}^{N-1} [0; 1] \right\} \subset \mathbb{R}^{2N-2}, \quad (2)$$

де точка $\mathbf{X} = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_{N-2} \quad x_{N-1}] \in \left\{ \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{N-1} \mid x_j \in [a_j; b_j] \subset (0; 1) \ \forall \ j = \overline{1, N-1} \right\}$ (3)

є чистою стратегією першого гравця (стискаюче зусилля в МДНОН), точка

$$\mathbf{Y} = [y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_{N-2} \quad y_{N-1}] \in \left\{ \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{N-1} \mid y_j \in [a_j; b_j] \subset (0; 1) \ \forall \ j = \overline{1, N-1} \right\} \quad (4)$$

є чистою стратегією другого гравця (площа поперечного перерізу в МДНОН), причому виконані умови

$$X_j = [a_j; b_j] \subset (0; 1) \quad \forall \ j = \overline{1, N-1}, \ \ Y_k = [a_k; b_k] \subset (0; 1) \quad \forall \ k = \overline{1, N-1}, \quad (5)$$

$$x_N = 1 - \sum_{k=1}^{N-1} x_k, \ \ y_N = 1 - \sum_{k=1}^{N-1} y_k, \quad (6)$$

$$\mu_{\mathbb{R}}([a_k; b_k]) \neq 0 \quad \forall \ k = \overline{1, N-1}, \quad (7)$$

$$a_k < b_k, \ a_k > 0, \ b_k < 1 \quad \forall \ k = \overline{1, N-1}, \ \ \sum_{k=1}^{N-1} b_k < 1. \quad (8)$$

Звісно, умови (7) і (8) є взаємопов’язаними, серед яких легко визначити зайву [4].

Формулювання мети дослідження узагальненої проблеми усунення невизначеностей

Необхідно знайти оптимальну поведінку проектувальника в МДНОН на N -колонну конструкцію-опору як оптимальну стратегію другого гравця у грі з ядром (1) на паралелепіпеді (2) за умов (5) – (8). Така оптимальна поведінка стане методом усунення N часткових невизначеностей за допомогою узагальненого принципу мінімізації максимального дисбалансу.

Теорема про обґрунтування опуклості гри з ядром (1) на паралелепіпеді (2)

Теорема 1. Антагоністична гра з ядром (1) з параметром $\alpha > 0$ й $m > 0$, $n > 0$ на паралелепіпеді (2) за умов (5) - (8) є опуклою.

Доведення. Умовою опуклості цієї гри є виконання нерівностей

$$\frac{\partial^2}{\partial y_i^2} T(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \geqslant 0 \quad \forall\, y_j \in Y_j \text{ та } \forall\, x_l \in X_l \text{ при } j = \overline{1, N-1} \text{ та } l = \overline{1, N-1},\ i = \overline{1, N-1}. \tag{9}$$

Маємо можливі ненульові значення перших частинних похідних (майже скрізь):

$$\frac{\partial}{\partial y_i} T(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = -\alpha \frac{n x_i^m}{y_i^{n+1}} \text{ або } \frac{\partial}{\partial y_i} T(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \alpha \frac{n\left(1 - \sum_{k=1}^{N-1} x_k\right)^m}{\left(1 - \sum_{k=1}^{N-1} y_k\right)^{n+1}} \quad \forall\, i = \overline{1, N-1}. \tag{10}$$

Зі співвідношень (10) слідують можливі ненульові значення для других частинних похідних (майже скрізь):

$$\frac{\partial^2}{\partial y_i^2} T(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \alpha \frac{n(n+1) x_i^m}{y_i^{n+1}} \text{ або } \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} T(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \alpha \frac{n(n+1)\left(1 - \sum_{k=1}^{N-1} x_k\right)^m}{\left(1 - \sum_{k=1}^{N-1} y_k\right)^{n+2}} \quad \forall\, i = \overline{1, N-1}. \tag{11}$$

Усі чисельники і знаменники дробів під знаком максимуму в (11) є додатними, звідки майже скрізь випливає (9). На нуль-вимірних множинах, де ядро (1) не є диференційовним, його перші частинні похідні (10) "стрибають" з меншого значення у більше, тому і там (9) виконано. Теорему доведено.

Теорема про єдину чисту оптимальну стратегію проектувальника в опуклій грі з ядром (1) на паралелепіпеді (2)

Теорема 2. В опуклій грі з ядром (1) з параметром $\alpha > 0$ й $m > 0$, $n > 0$ на паралелепіпеді (2) за умов (5) - (8) другий гравець (проектувальник) має єдину чисту оптимальну стратегію:

$$\mathbf{Y}_* = \left[y_1^* \;\; y_2^* \;\; \cdots \;\; y_{N-2}^* \;\; y_{N-1}^* \right] \in \left\{ \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{N-1} : y_j \in \left[a_j; b_j\right] \subset (0; 1)\ \forall\, j = \overline{1, N-1} \right\} \tag{12}$$

з компонентами

$$y_j^* = \frac{b_j^{m/n}}{\sum_{k=1}^{N-1} b_k^{m/n} + \left(1 - \sum_{k=1}^{N-1} a_k\right)^{m/n}} \quad \forall\, j = \overline{1, N-1} \tag{13}$$

при виконаних умовах належностей

$$\frac{b_j^{m/n}}{\sum_{k=1}^{N-1} b_k^{m/n} + \left(1 - \sum_{k=1}^{N-1} a_k\right)^{m/n}} \in \left[a_j; b_j\right] \quad \forall\, j = \overline{1, N-1}. \tag{14}$$

Доведення. Оскільки за Теоремою 1 досліджувана гра є опуклою, то у ній за відомою теоремою про оптимальні стратегії другого гравця в опуклій грі проектувальник має (можливо, єдину) чисту оптимальну стратегію (12), котра знаходиться за принципом мінімаксу [1, 2, 4]. Маємо

$$\max_{\mathbf{X}\in\prod_{j=1}^{N-1}X_j} T(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \max_{\mathbf{X}\in\prod_{j=1}^{N-1}[a_j;\,b_j]} T(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \max_{\mathbf{X}\in\prod_{j=1}^{N-1}[a_j;\,b_j]} \left\{ \alpha \max\left\{ \left\{\frac{x_j^m}{y_j^n}\right\}_{j=1}^{N-1}, \frac{\left(1-\sum_{k=1}^{N-1}x_k\right)^m}{\left(1-\sum_{k=1}^{N-1}y_k\right)^n} \right\} \right\} =$$

$$= \alpha \max\left\{ \left\{ \max_{x_j\in[a_j;\,b_j]} \left\{\frac{x_j^m}{y_j^n}\right\} \right\}_{j=1}^{N-1}, \max_{\mathbf{X}\in\prod_{j=1}^{N-1}[a_j;\,b_j]} \left\{ \frac{\left(1-\sum_{k=1}^{N-1}x_k\right)^m}{\left(1-\sum_{k=1}^{N-1}y_k\right)^n} \right\} \right\} =$$

$$= \alpha \max\left\{ \left\{\frac{b_j^m}{y_j^n}\right\}_{j=1}^{N-1}, \frac{\left(1-\sum_{k=1}^{N-1}a_k\right)^m}{\left(1-\sum_{k=1}^{N-1}y_k\right)^n} \right\} = \alpha \max\left\{ \frac{b_1^m}{y_1^n}, \frac{b_2^m}{y_2^n}, \mathbf{K}, \frac{b_{N-1}^m}{y_{N-1}^n}, \frac{\left(1-\sum_{k=1}^{N-1}a_k\right)^m}{\left(1-\sum_{k=1}^{N-1}y_k\right)^n} \right\}, \quad (15)$$

$$\min_{\mathbf{Y}\in\prod_{k=1}^{N-1}Y_k} \left\{ \max_{\mathbf{X}\in\prod_{j=1}^{N-1}X_j} T(\mathbf{X},\mathbf{Y}) \right\} = \min_{\mathbf{Y}\in\prod_{k=1}^{N-1}[a_k;\,b_k]} \left\{ \max_{\mathbf{X}\in\prod_{j=1}^{N-1}[a_j;\,b_j]} T(\mathbf{X},\mathbf{Y}) \right\} =$$

$$= \min_{\mathbf{Y}\in\prod_{k=1}^{N-1}[a_k;\,b_k]} \left\{ \alpha \max\left\{ \left\{\frac{b_j^m}{y_j^n}\right\}_{j=1}^{N-1}, \frac{\left(1-\sum_{k=1}^{N-1}a_k\right)^m}{\left(1-\sum_{k=1}^{N-1}y_k\right)^n} \right\} \right\} = \alpha \max\left\{ \left\{\frac{b_j^m}{\left(y_j^*\right)^n}\right\}_{j=1}^{N-1}, \frac{\left(1-\sum_{k=1}^{N-1}a_k\right)^m}{\left(1-\sum_{k=1}^{N-1}y_k^*\right)^n} \right\} = v_*. \quad (16)$$

Оптимальне значення гри v_* у (16) досягається на таких $\left\{y_j^*\right\}_{j=1}^{N-1}$, що

$$v_* = \alpha \frac{b_j^m}{\left(y_j^*\right)^n} = \alpha \frac{\left(1-\sum_{k=1}^{N-1}a_k\right)^m}{\left(1-\sum_{k=1}^{N-1}y_k^*\right)^n} \quad \forall\ j=\overline{1,\,N-1}. \quad (17)$$

Із (17) отримуємо

$$y_j^* = \left(\alpha\frac{b_j^m}{v_*}\right)^{1/n} \quad \forall\ j=\overline{1,\,N-1},\quad 1-\sum_{k=1}^{N-1}y_k^* = \left(\alpha\frac{\left(1-\sum_{k=1}^{N-1}a_k\right)^m}{v_*}\right)^{1/n}, \quad (18)$$

$$\sum_{j=1}^{N-1}y_j^* + 1 - \sum_{k=1}^{N-1}y_k^* = 1 = \sum_{j=1}^{N-1}\left(\alpha\frac{b_j^m}{v_*}\right)^{1/n} + \left(\alpha\frac{\left(1-\sum_{k=1}^{N-1}a_k\right)^m}{v_*}\right)^{1/n} =$$

$$=\alpha^{1/n}\frac{\sum_{j=1}^{N-1}b_j^{m/n}+\left(1-\sum_{k=1}^{N-1}a_k\right)^{m/n}}{\left(v_*\right)^{1/n}}=\alpha^{1/n}\frac{\sum_{k=1}^{N-1}b_k^{m/n}+\left(1-\sum_{k=1}^{N-1}a_k\right)^{m/n}}{\left(v_*\right)^{1/n}}, \qquad (19)$$

$$\left(v_*\right)^{1/n}=\alpha^{1/n}\left[\sum_{k=1}^{N-1}b_k^{m/n}+\left(1-\sum_{k=1}^{N-1}a_k\right)^{m/n}\right], \qquad (20)$$

$$v_*=\alpha\left[\sum_{k=1}^{N-1}b_k^{m/n}+\left(1-\sum_{k=1}^{N-1}a_k\right)^{m/n}\right]^n, \qquad (21)$$

$$y_j^*=\left(\alpha\frac{b_j^m}{v_*}\right)^{1/n}=$$

$$=\left(\alpha\frac{b_j^m}{\alpha\left[\sum_{k=1}^{N-1}b_k^{m/n}+\left(1-\sum_{k=1}^{N-1}a_k\right)^{m/n}\right]^n}\right)^{1/n}=\frac{b_j^{m/n}}{\sum_{k=1}^{N-1}b_k^{m/n}+\left(1-\sum_{k=1}^{N-1}a_k\right)^{m/n}}\quad \forall\ j=\overline{1,\ N-1}. \qquad (22)$$

Звичайно, виведене (13) через (17) — (22) має місце тільки при (14), адже має бути виконано (12), тобто $\mathbf{Y}_*\in\prod_{k=1}^{N-1}\left[a_k;\,b_k\right]$ обов’язково. Теорему доведено.

Висновок і перспективи подальших досліджень дії нормованого одиничного навантаження

За (13) відбуватиметься не тільки відповідний розподіл будівельних ресурсів виготовлення N призматичних колон конструкції-опори [1, 2], а й усунення N часткових невизначеностей [4] за допомогою узагальненого принципу мінімізації максимального дисбалансу у формі гіперповерхні (1) з параметром $\alpha>0$ й $m>0$, $n>0$ на паралелепіпеді (2) за умов (5) - (8). У подальших дослідженнях щодо дії нормованого одиничного навантаження слід узагальнювати метод визначення компонент у (12), які за (13) можуть називатися регулярними, як і сама оптимальна стратегія. Таке узагальнення стосуватиметься випадків виходу частини компонент вектора (12) за границі відповідних областей $\left\{\left[a_j;\,b_j\right]\right\}_{j=1}^{N-1}$.

Література

1. Романюк В. В. Модель визначення оптимального рішення проектувальника у задачі про розрахунок повздовжньої стійкості двох елементів будівельної конструкції при дії на них нормованого стискаючого зусилля / В. В. Романюк // Проблеми трибології. – 2010. – № 1. – С. 42-56.

2. Романюк В. В. Моделювання дії нормованого одиничного навантаження на три колони однакової висоти у будівельній конструкції і знаходження оптимальної площі кожної опори / В. В. Романюк // Проблеми трибології. – 2010. – № 3. – С. 18-25.

3. Романюк В. В. Доведення тверджень для моделі дії нормованого одиничного навантаження на три колони однакової висоти у будівельній конструкції / В. В. Романюк // Проблеми трибології. – 2010. – № 4. – С. 72-81.

4. Романюк В. В. Модель усунення часткових невизначеностей імовірнісного типу як мінімізація максимального дисбалансу // Науковий вісник Чернівецького університету: Збірник наукових праць. Комп’ютерні системи та компоненти. – Чернівці: ЧНУ, 2011.

Надійшла 14.04.2011