М'якуш Б.М.,
Кшивецький Б.Я.
Національний лісотехнічний університет України,
м. Львів, Україна,
E-mail: kshivby@ukr.net

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ФОРМОСТІЙКОСТІ ПАРКЕТНОЇ ДОШКИ СКЛЕЄНОЇ ТЕРМОПЛАСТИЧНИМИ КЛЕЯМИ

УДК 674.213:69.025.351.3:678.073

Розглянуто закономірності зміни напружено - деформаційного стану у тришаровій паркетній дошці залежно від її конструкції та умов експлуатації. Побудовано математичну модель для дослідження формостійкості тришарової паркетної дошки склеєної термопластичними полівінілацетатними клеями. Наведено алгоритмічні аспекти для чисельної реалізації побудови математичної моделі.

Ключові слова: паркетна дошка, математична модель, клей, деревина, напружено-деформаційний стан.

Вступ

Паркетні підлоги за останнє століття пройшли декілька етапів свого розвитку, від високохудожнього, при якому вони виготовлялись безпосередньо на місці, до сучасних паркетних виробів – паркетних дошок, які промислово виготовляються, легко монтуються в домашніх умовах, мають тривалий термін експлуатації тощо. Характеристика і властивості паркетної дошки визначаються фізико-механічними властивостями деревини та деревинних матеріалів, з яких вона виготовлена, клеями, якими вона склеєна, покриттям, яким вона опоряджена, умовами експлуатації тощо [1].

Переваги використання паркетної дошки в тому, що це є довговічне і міцне покриття для підлоги, яке легко і просто укладається, може демонтуватися кілька разів без пошкоджень і будь-яких наслідків, піддається реставрації, антисептична, проста у прибиранні, екологічна, природньо тепла. До недоліків паркетної дошки відносять те, що у разі сильного промокання - піддається деформації, після якої не підлягає відновленню та не є вологостійким матеріалом, оскільки при порушенні умов експлуатації -змінює свою формостійкість.

Сучасна паркетна дошка складається з трьох шарів. Це деревина листяних і хвойних порід, яка з'єднуються між собою за допомогою клеїв. Тому, паркетну дошку слід розглядають як конструкцію, що складається з деревини та клею. Саме від фізико-механічних та фізико - хімічних властивостей деревини і клею будуть залежати основні якісні показники паркетної дошки, а саме - формостійкість та довговічність.

Неабияку увагу сучасним паркетним дошкам слід приділяти забезпеченню належної екологічності та формостійкості під час експлуатації. Екологічність паркетної дошки залежатиме від матеріалів, якими вона склеєна та матеріалів, якими вона опоряджена. Формостійкість паркетної дошки залежатиме від умов експлуатації, а саме, вологості, температури та навантаження, яке вона нестиме.

Екологічність тришаровій паркетній дощці частково можна забезпечити використанням для її склеювання термопластичних полівінілацетатних клеїв, які відповідають ступеню навантаження D3, D4 відповідно до Європейського стандарту DIN EN 204:2001.

Дослідити формостійкість тришарової паркетної дошки можна за допомогою сучасних методів, а саме математичного моделювання. Це дозволить швидко отримати достовірні результати досліджень, а при необхідності і їх прогнозувати. Для цього пропонується дослідити напружено - деформаційний стан паркетної дошки та побудувати математичну модель для визначення формостійкості тришарової паркетної дошки склеєної термопластичними полівінілацетатними клеями залежно від зміни вологості, температури та навантажень під час експлуатації.

Мета і постановка задачі

Метою даної роботи є побудова математичної моделі формостійкості тришарової паркетної дошки склеєної термопластичними полівінілацетатними клеями залежно від умов експлуатації.

Виклад основного матеріалу.

Існуючі способи дослідження та вивчення формостійкості тришарової паркетної конструкції є тривалими у часі, а їх результати недостовірними. Тому для дослідження формостійкості тришарової паркетної дошки сформованої за допомогою термопластичних полівінілацетатних клеїв запропоновано використати математичне моделювання та побудувати математичну модель визначення її формостійкості.

Для дослідження теплового стану тришарової пластини запропоновано використати математичну модель, яка описується таким рівнянням:

$$C(T)\rho\rho T)\frac{\partial T}{\partial t}=\mathrm{div}(\lambda\mathrm{i}T)g(T)\mathrm{grad}T(x,y,\tau)). \tag{1}$$

Розглянемо випадок, коли режим є нестаціонарним, тоді математична модель матиме вигляд:

$$C_j\rho_j\frac{\partial T^i}{\partial t}=\lambda_{jx}\frac{\partial^2 T^i}{\partial x^2}+\lambda_{jy}\frac{\partial^2 T^i}{\partial y^2}, \tag{2}$$

де C_j – питома теплоємність j шару;

ρ_j – густина матеріалу шара;

$\lambda_{jx}\lambda_{jy}$ – коефіцієнти теплопровідності шарів.

Крайові умови мають вигляд:

- поверхня торців є теплоізольована:

$$\frac{\partial T^{(i)}}{\partial x}\Big|_{x=0,x=l_x^{(j)}}=\frac{\partial^2 T^{(i)}}{\partial y}\Big|_{y=0,y=l_y^{(i)}}=0, \tag{3}$$

де $l_x^{(j)}, l_y^{(j)}$ – товщини шарів;

- на верхній поверхні (z = 0) граничні умови характеризують взаємодію з навколишнім середовищем:

$$-\lambda_1\frac{\partial T^{(i)}}{\partial t}\Big|_{z=0}=t_s(T_{cep}-T^{(1)}), \tag{4}$$

де γ_s – коефіцієнт теплообміну на грані;

T_{cep} – температура середовища;

- між шарами допускається ідеальний легкий контакт, який описується умовами:

$$\lambda_j\frac{\partial T^{(i)}}{\partial z}\Big|_{t=z_j}=\lambda_{j+1}\frac{\partial T^{(j+1)}}{\partial z}\Big|_{t=z_j}, \tag{5}$$

$$T^{(i)}(x,y,t)=T^{(i+1)}(x,y,z_j). \tag{6}$$

Для контролю j-го шару у якості початкової умови використовується співвідношення:

$$T^{(i)}(x,y,0)=T_0^{(i)}(x,y). \tag{7}$$

Для синтезу математичної моделі визначення напружено - деформаційного стану використаний закон Гука [2]:

$$\{\sigma\}=[D]\{\varepsilon\}, \tag{8}$$

де $\{\sigma\}=\{\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xj}\}$ – вектор напружень;

$\{\varepsilon\}=\{\varepsilon_x,\varepsilon_y,j_{xj}\}$ – вектор деформацій;

$[D]$ – матриця жорсткості, яка має вигляд:

$$C=\begin{bmatrix}\frac{E_1}{1-v_1v_2} & \frac{vE_2}{1-v_1v_2} & 0\\ \frac{v_1E_2}{1-v_1v_2} & \frac{E_2}{1-v_1v_2} & 0\\ 0 & 0 & \mu\end{bmatrix}, \tag{9}$$

де $E_i(T,U)$ – модулі Юнга;

$\nu_i(T,U)$ – коефіцієнти Пуассона;

$\mu(T,U)$ – модуль зсуву.

Будемо вважати, що матеріали шарів є нестискаючі у поперечному напрямі, тобто

$$\varepsilon_z=0;\quad \varepsilon_y=0. \tag{10}$$

Вважаємо, що для несучих шарів справедлива гіпотеза тонких перетинів Бернуллі [3]. Тоді є відсутні напрямні компоненти деформації вздовж осі oz і тангенціальні коливальні деформації у площинах xoz і yot, тобто:

$$\gamma_{zt} = 0; \quad \gamma_{zx} = 0. \tag{11}$$

Вважаємо, що для внутрішнього шару справедлива гіпотеза прямолінійності деформування деревини [4], тобто переміщення точок серединної площини дошки відхилень.

Використовуємо співвідношення Коші [2]:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial t};$$
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t}; \tag{12}$$
$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z};$$

З врахуванням вище прийнятих гіпотез (11) отримано такі вирази:

$$\varepsilon_z = 0; \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0; \tag{13}$$
$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial y}.$$

Інтегруючи останню формулу по z, отримаємо:

$$U = -z\frac{\partial w}{\partial x} + f_i(x_i y). \tag{14}$$

Оскільки (14) вірно для всієї системи, то для середньої площини маємо:

$$U_0 = -z\frac{\partial w}{\partial x} + f_i(x_i y). \tag{15}$$

Згідно прийнятих гіпотез (15) отримаємо що $f_1(x, y) = 0$. Отже:

$$U = -z\frac{\partial w}{\partial x}. \tag{16}$$

Розглянемо верхні шари нашої системи. З врахуванням прийнятих допущень, співвідношень Коші (13) і формули (15) отримаємо:

$$\{\varepsilon^i\} = \{\varepsilon_x^i\}, \{\sigma^i\} = \{\sigma_x^i\}, i = 1{,}3. \tag{17}$$

Закон Гука має вигляд:

$$\{\sigma_x^i\} = [D^i]\{\varepsilon_x^i\}, i = 1{,}3, \tag{18}$$

де $[D^i]$ – матриця пружних характеристик (9) для шарів.

Для визначеного шару є дотичні напруження у площині xoz:

$$\{\varepsilon^i\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^2 \\ \gamma_{zx}^2 \end{Bmatrix}; \quad \{\sigma^z\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x^2 \\ \tau_{zx}^2 \end{Bmatrix}. \tag{19}$$

Тоді закон Гука має вигляд:

$$\{\sigma^2\} = [D^2]\{\varepsilon^2\}, \tag{20}$$

де $[D^2]$ – матриця (9) для середнього шару.

Для моделювання формостійкості тришарової системи скористаємось методом скінченних елементів [5].

Метод передбачає варіаційне формування математичної моделі на основі принципу мінімуму повної потенціальної енергії, яку представлено у вигляді:

$$\Lambda = \int_v \frac{1}{2}\left(\{\varepsilon\}^T\{\sigma\} - \{\varepsilon_0\}^T\{\sigma\}\right)dV \tag{21}$$

Використовуємо двовимірний симплекс - елемент (рис. 1)

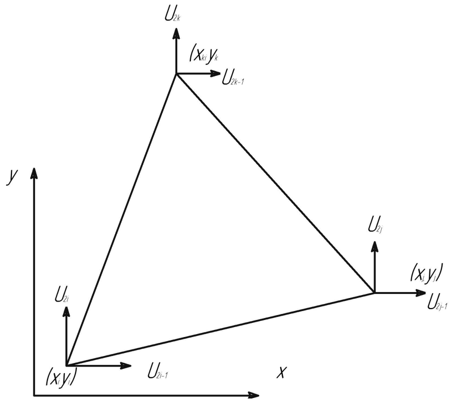

Рис. 1 – Двовимірний симплекс - елемент

Переміщення u і v в середині елемента визначаються залежністю:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} L_{ik} \\ L_{iy} \\ L_{jx} \\ L_{jy} \\ L_{kx} \\ L_{ky} \end{Bmatrix}, \tag{22}$$

де i, j, k – вузли (вершини) елемента.

Функції форми $\lfloor N_i, N_j, N_k \rfloor \lfloor N_i, N_j, N_k \rfloor$ визначаються за формулами:

$$\begin{gathered} N_i = \frac{1}{2S}\left(a_i + b_i x + c_i y\right); \\ N_j = \frac{1}{2S}\left(a_j + b_j x + c_j y\right); \\ N_k = \frac{1}{2S}\left(a_k + b_k x + c_k y\right); \end{gathered} \tag{23}$$

$$\begin{gathered} a_i = x_i y_k - x_k y_i; \quad a_j = x_k y_i - x_i y_k; \; a_k = x_i y_j - x_j y_i; \\ b_i = y_j - y_k; \quad b_j = y_k - y_j; \; b_k = y_i - y_j; \\ c_i = x_k - x_j; \; c_j = x_i - x_k; \; c_k = x_j - x_i; \\ 2S = x_i y_k - x_i y_j - y_k x_i + x_k y_i - x_i y_j. \end{gathered} \tag{24}$$

Враховуючи співвідношення Коші, отримаємо:

$$\{\varepsilon\} = [B]\{L\}, \tag{25}$$

де матриця $[B]$ має вигляд:

$$[B] = \frac{1}{2S}\begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & o & c_k \\ \frac{c_i}{2} & \frac{b_i}{2} & \frac{c_j}{2} & \frac{b_j}{2} & \frac{c_k}{2} & \frac{b_k}{2} \end{bmatrix}. \tag{26}$$

Для реалізації математичної моделі формостійкості скористаємось принципом можливих переміщень [6], який випадку тривимірного шару можна записати таким чином:

$$
\begin{gathered}
\{\delta_0\}^T\{R_0\} = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{l_j}^{l_j+1} \int_{\frac{h_0}{z}}^{\frac{H_0}{2}+h_i} \{\varepsilon^2\}^T \{\sigma^1\} dzdxdy + \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{z}} \int_{l_j}^{l_{j+1}} \int_{\frac{h_o}{2}-h_2}^{\frac{h_0}{z}} \{\varepsilon^z\}^T \{\sigma^z\} dzdxdy + \\
+ \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \int_{l_j}^{l_{i=1}} \int_{-\frac{h_0}{2}-h_z}^{\frac{h_0}{2}} \{\varepsilon^3\}^T \{\sigma^3\} dzdxdy,
\end{gathered}
\tag{27}
$$

де матриці $\{R_0\}$ – вектор вузлових сил скінченного елемента;

матриці $h_i\,(i=1{,}3)$ – товщини першого, другого і третього шарів.

Підставивши (26) в співвідношення для шарів напружень і переміщень, отримаємо:

$$
\{R_0\} = [K^2]\{\sigma_0\} + [K^i]\{\sigma_i\} + [K^3]\{\sigma_3\} = [K]\{\sigma_0\}. \tag{28}
$$

Після обчислень локальних матриць наближеності здійснювалася побудова глобальної матриці за формулою:

$$
[K_{2j,2j}] = [K_{ij,2j}] + [K_j],\ j = \overline{1,N}, \tag{29}
$$

де матриці $\lfloor K_{zj,zj} \rfloor$ – підматриця глобальної матриці жорсткості;

$\lfloor K_j \rfloor$ – локальна матриця жорсткості;

$[N]$ – кількість елементів дискредитації.

Висновки

Побудовано математичну модель, для визначення формостійкості тришарової паркетної дошки яка склеєна термопластичними полівінілацетатними клеями. Наведено алгоритмічні аспекти для чисельної реалізації побудови математичної моделі.

Література

1. М’якуш Б.М. Аналіз конструкцій та формостійкості паркетної дошки / Б.М. М’якуш // Науковий вісник НЛТУ України: зб. наук-техн. праць. Львів: РВВ НЛТУ України. – 2010. – Вип. 20.13. – С. 135-138.

2. Кравчук А. С. Механика полимерных и композитных материалов / А. С. Кравчук, В. П. Майборода, Ю. С. Урижумцев. – М. – 1985. – 319 с.

3. Белянкин Ф. П. Деформативность и сопротивляемость древесины / Ф. П. Белянкин, В. Ф. Яценко. – К.: АН УССР, 1957. – 199 с.

4. Боровиков А. Н. Справочник по древесине / А. Н. Боровиков, Б. Н. Уголев. – М.: Лесн. пром-сть, 1989. – 296 с.

5. Сегерлинд Л. Применение метода конечних елементов / Сегерлинд Л. – М.: Мир, 1979. – 378 с.

6. Bodic J. Mechanics of Wood and Composites / Bodic J., Jayne A. – New York: Van Nostraind Reinhold, 1982. – 712 p.

Поступила в редакцію 10.02.2016

Myakush B.M, Kshyvetskyy B.Y. **Mathematical modeling of shape stability of parquet board glued with thermoplastic adhesives.**

The article is concerned with block flooring. Special consideration is given to three-layered parquet board as a modern covering material for the floor. The advantages and disadvantages of using three-layered parquet boards are shown. Considering the design of this type of floorboard, due attention is paid to its shape stability. Therefore, the aim of this work is construction of a mathematical model of the operation-dependent shape stability of three-layered parquet board glued with thermoplastic polyvinyl acetate adhesives.

The shape stability of parquet board depends on changes in its stress-strain state. That is why, in order to construct the mathematical model, we should consider the changes in stress-strain state of the structure of three-layered parquet board depending on the materials it is made of, the adhesive it is glued with, and the conditions it is operated in. To study stress-strain state, the parquet board is viewed as a three-layered plate for which mathematical modeling is applied to study its thermal state. Given are boundary conditions for the mathematical model, namely, the surface of the ends is heat insulated, boundary conditions on the top surface describe the interaction with the environment, the perfect slight contact is allowed between the layers. To construct a model for determining the stress-strain state, Hooker's law is used, while for modeling of shape stability a finite element method is applied, which provides for variational calculation of mathematical models based on the principle of a minimum of total potential energy. For the inner layer of the parquet board, the hypothesis of linearity is true for which the Caushy ratio is used. The computation of the local matrices of proximity was followed by building a global matrix. Based on the calculations results, a mathematical model was constructed to study the shape stability of three-layered parquet board glued with thermoplastic adhesives. Algorithmic aspects have been given for numerical realization of the mathematical model.

Key words: parquet board, mathematical model, wood, adhesive, stress - strain state.

References

1. Myakush B.M. Analiz konstruktsii ta formostiykosti parketnoi doshky/ Myakush B.M. Naukovyi visnyk NLTUUkrainy:Zbirnyk naukovo-tekhnichnykh prats.Lviv RVV NLTU Ukrainy. 2010.Vypusk 20.13. S.135-138.
2. Mekhanika polimernykh i kompozitnykh materialov. A.S.Kravchuk, V.P. Maiboroda, Yu.S.Urizhumtsev. M. 1985. 319 s.
3. Deformativnost i soprotivliaemost drevesiny. F.P. Belyankin,V.F.Yatsenko. K.:AN Ukr.SSR,1957. 199 s.
4. Spravochnik po drevesinie. A.N.Borovikov,B.N.Ugolev. M. Lesnaya promyshlennost. 1989. 296s.
5. Segerlind L. Primenenie metoda konechnykh elementov. M. Mir, 1989. 378 s.
6. Mechanics of Wood and Composites. Bodic J., Jayne A. New York: Van Nostraind Reinhold, 1982. 712 p.