Венцель Є.С.,*
Кравець А.М.**
*Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків, Україна,
**Український державний університет залізничного транспорту, м. Харків, Україна.
E-mail: kravets_am@ukr.net

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТРИБОСПОЛУЧЕННЯ

УДК 621.891

Розглянуто математичну модель трибосполучення, яка пов'язує характер фізико-механічних процесів, що мають місце при його роботі, із характеристиками часток механічних забруднень, які містяться в мастильному матеріалі (ступінь дисперсності та концентрація). В якості параметру трибосполучення, що моделюється, обрано питому силу тертя. В результаті моделювання пов'язано силу тертя і інтенсивність зношування із діелектричною проникністю проміжного середовища.

Ключові слова: трибосполучення, модель, питома сила тертя, домішки, діелектрична проникність, інтенсивність зношування.

Вступ

Сучасні технічні пристрої містять велику кількість трибо сполучень, робота яких супроводжується різноманітними фізико-механічними процесами. Розуміння процесів, що відбуваються в трибосполученні дозволяє оптимізувати їх роботу і знизити витрати енергоресурсів на експлуатацію будь-якого технічного пристрою в цілому. І саме математичне моделювання в багатьох випадках [1, 2 та ін.] дозволяє глибше проникнути в сутність даних процесів і спрогнозувати вплив багатьох зовнішніх і внутрішніх факторів на працездатність трибо вузла.

Постановка проблеми

Характер фрикційної взаємодії між поверхнями тертя і їх зношування багато в чому залежить від особливостей стану дисперсних частинок домішок і забруднень, які знаходяться у мастильному матеріалі та як наслідок, проникають в зазор між поверхнями. Ступінь дисперсності частинок впливає як на фізико-механічні, так і на електричні характеристики пар тертя. Оскільки концентрація і ступінь дисперсності таких частинок можуть впливати з одного боку на силу тертя і інтенсивність зношування, а з іншого боку на діелектричну проникність середовища, вважається доцільним розглянути питання про кореляцію між цими величинами.

Результати дослідження

При аналізі процесів, які перебігають у механічному вузлі при відносному русі поверхонь тертя, будемо виходити з найбільш загального визначення сили тертя F_{fr}, як похідної від дисипативної функції по узагальненій швидкості:

$$F_{fr} = -\frac{dD}{d\dot{q}},$$

де D – дисипативна функція;

$\dot{q}$ – узагальнена швидкість.

Таке визначення сили тертя використовується, наприклад, І.І. Карасиком [3], що з урахуванням співвідношення між дисипативною функцією і генеруванням ентропії p_S, яке має вигляд $D = p_S T$, дозволило отримати зв'язок між питомою силою тертя σ_{fr} і генеруванням ентропії [4]:

$$\sigma_{fr} = \frac{p_S T h}{u}, \tag{1}$$

де p_S – генерування ентропії, Дж/(К·м^3·с);

T – температура поверхні пар тертя, К;

h – товщина шару тертя, м;

u – швидкість ковзання, м/с.

Як відомо, генерування ентропії є адитивною величиною, тому повна питома сила тертя пропорційна сумарному генеруванню ентропії. Головним внеском в генерування ентропії ансамблем частинок зношування є дисипація енергії, що обумовлена їх електричною взаємодією з поверхнею тертя.

Відомо [5], що дрібнодисперсні частинки знаходяться звичайно в зарядженому стані. Заряд q частинки пов'язаний з їх розміром a формулою

$$q = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon\phi_0 a e^{\frac{-a}{\lambda_D}} \tag{2}$$

де ε – діелектрична проникність дисперсного середовища;

ε_0 – електрична стала, $\varepsilon_0 = 8{,}854\cdot10^{-12}$ Ф/м;

ϕ_0 – потенціал виходу, В;

a – розмір частинок забруднень, м;

λ_D – радіус дебаївського екранування заряджених частинок, м;

Причина виникнення заряду на дрібнодисперсних частинках пов'язана з різноманітними процесами, що перебігають на фрикційному контакті: опромінюванням частинок електромагнітним та іншими видами іонізаційних випромінювань, термоелектронною емісією і обміном заряджених частинок із оточуючим середовищем, якщо хімічні потенціали заряджених частинок і середовища відмінні. Саме два останні процеси зазвичай реалізуються в вузлах тертя, для яких є характерними висока локальна температура і наявність різниці хімічних потенціалів між частинками зносу і змащуючою рідиною або елементами вторинних структур.

Генерування ентропії розраховується за відомою формулою

$$p_S = \vec{j}_q \vec{X}_q, \tag{3}$$

де $\vec{j}_q$ - густина струму заряджених частинок зносу;

$\vec{X}_q$ - термодинамічна сила, яка обумовлює цей струм.

Згідно з, термодинамічна сила дорівнює

$$\vec{X}_q = -\frac{grad\phi}{T}, \tag{4}$$

де ϕ - електричний потенціал поля сил електростатичного зображення.

Механізм виникнення цього поля полягає в тому, що заряджені дрібнодисперсні частинки, які знаходяться в проміжку трибосполучення на малих (порядку декількох дебаєвських радіусів λ_D) відстанях від поверхні, індуктують в провідному матеріалі вузла тертя електричні заряди протилежного знаку, внаслідок чого між зарядженими частинками і поверхнею трибосполучення виникають сили електростатичного зображення, під дією яких виникає електричний струм заряджених частинок. При цьому можна вважати, що частинка-зображення створює електричне поле, яке описується дебаєвським потенціалом

$$\phi_D = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r} e^{\frac{-r}{\lambda_D}}. \tag{5}$$

Така частинка-оригінал рухається в цьому полі.

З огляду на швидке зменшення цього потенціалу його можна покласти рівним нулю на довільній відстані z' від поверхні тертя, якщо $z' >> \lambda_D$. В такій точці z' швидкість ϑ_Z частинки-оригінала дорівнює нулю, бо взаємодія між частинкою-оригіналом і частинкою-зображенням при $z' >> \lambda_D$ є зневажливо малою. Під дією дебаєвського поля частинка-оригінал рухається перпендикулярно до площини тертя, наближаючись до неї на мінімальну відстань δ, яка визначається товщиною поверхневого адсорбованого молекулярного прошарку. Оскільки розгін частинки-оригіналу відбувається на малій відстані, роботою сил в'язкого тертя можна знехтувати. Тоді різниця дебаєвських потенціалів між точкою z', де $\phi(z') = 0$ і точкою, яка віддалена на величину δ від номінальної поверхні трибосполучення, дорівнює кінетичній енергії частинки, поділеної на заряд, тобто

$$q\cdot\Delta\phi = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon 2\delta} e^{\frac{-2\delta}{\lambda}} = \frac{m\vartheta_Z^2}{2}. \tag{6}$$

Коефіцієнт «*2»* перед δ пов'язаний з тим, що відстань між частинкою-оригіналом та зображенням дорівнює подвійній відстані кожної з цих частинок до номінальної поверхні. З рівняння (6) можна визначити швидкість частинок біля поверхні трибосполучення:

$$\vartheta_Z = \frac{q}{2}\frac{e^{\frac{-\delta}{\lambda_D}}}{\sqrt{\pi\varepsilon_0\varepsilon m\delta}} . \tag{7}$$

Вважаючи наближено дрібнодисперсні частинки забруднень сферичними, пов'яжемо їх масу m з густиною ρ і радіусом a:

$$m = \frac{4}{3}\pi\rho a^3 .$$

Підставляючи цей вираз в (7), наведемо швидкість заряджених частинок зношування у поверхні тертя у вигляді

$$\vartheta_Z = \frac{q}{4\pi}\sqrt{\frac{3}{\varepsilon_0\varepsilon\rho a^3\delta}}\cdot e^{\frac{-\delta}{a}} . \tag{8}$$

Якби всі заряджені частинки мали однаковий заряд q, то при їх впорядкованому русі зі швидкістю ϑ_Z виникав би електричний струм густиною

$$\vec{j}_q = qn_V\vartheta_Z\vec{k} ,$$

де n_V - об'ємна концентрація заряджених частинок;

$\vec{k}$ - орт.

Але з огляду на те, що величина заряду залежить від розміру частинок, слід розглядати окремо струми $d\vec{j}_q$, що створені зарядженими частинками, розміри знаходяться в нескінченно вузькому інтервалі концентрацій dn_V, тобто

$$d\vec{j}_q = q\vartheta_Z dn_V\vec{k} .$$

Зв'яжемо інтервал концентрації dn_V через функцію розподілу частинок з розміром

$$f(a) = \frac{dn_V}{n_V da} .$$

Тоді густина електричного струму

$$d\vec{j}_q = q\vartheta_Z n_V f(a)\vec{k}da , \tag{9}$$

Для знаходження термодинамічної сили $\vec{X}$ згідно з формулою (4) будемо виходити із того, що електричне поле сферичних частинок є радіально симетричним, і тоді

$$grad\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\vec{r}_{on} ,$$

де $\vec{r}_{on}$ - радіальний орт.

Тоді, диференціюючи рівняння (5) по r, знаходимо:

$$\vec{X}_q = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon rT}e^{\frac{-r}{\lambda_D}}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{\lambda_D}\right)\vec{k} .$$

Тоді для точки $r = \delta$, для якої була знайдена швидкість частинок і густина струму $d\vec{j}_q$, термодинамічна сила дорівнює

$$\vec{X}_q = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\delta T}e^{\frac{-\delta}{\lambda_D}}\left(\frac{1}{\delta}+\frac{1}{\lambda_D}\right)\vec{k} . \tag{10}$$

Визначимо тепер згідно з виразом (3) генерування ентропії, враховуючи рівняння (8, 9, 10):

$$dp_s = 4\pi\left(\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\delta}\right)^{3/2}\phi_0^3\,\frac{\exp\left(-3\dfrac{a}{\lambda_D}-2\dfrac{\delta}{\lambda_D}\right)}{T}\sqrt{\frac{3a}{\rho}}\left(\frac{a}{\delta}+\frac{a}{\lambda_D}\right)n_V f\left(a\right)da\,, \tag{11}$$

Позначаючи p'_S генерування ентропії, що обумовлене іншими причинами, наприклад теплопровідністю, дифузією та ін., і σ'_{fr} відповідну цим причинам питому силу тертя, зобразимо рівняння (1) з урахуванням рівняння (11) у вигляді:

$$\sigma_{fr} = \frac{4\pi h}{u}\int_0^{a_{\max}}\left(\frac{\varepsilon_0\varepsilon_\omega}{\delta}\right)^{3/2}\phi_0^3\exp\left(-3\frac{a}{\lambda_D}-2\frac{\delta}{\lambda_D}\right)\sqrt{\frac{3a}{\rho}}\left(\frac{a}{\delta}+\frac{a}{\lambda_D}\right)n_V f\left(a\right)da+\sigma'_{fr}\,, \tag{12}$$

де $a_{\max}$ – максимальний розмір частинок домішок, м.

Оскільки складові, що входять до σ'_{fr} не залежать від концентрації дисперсних частинок, в подальшому будемо позначати перший член рівняння (12), який залежить від неї, через σ^0_{fr}.

Для дослідження залежності питомої сили тертя від об'ємної концентрації n_V частинок домішок і забруднень слід розглянути залежність усіх величин, які входять до рівняння (12), від концентрації. Такими є потенціал виходу ϕ_0, діелектрична проникність середовища ε_ω та радіус дебаївського екранування λ_D. Відомо, що потенціал виходу матеріалу значно зменшується при нанесенні на цей матеріал домішкової речовини. Так, наприклад, Ленгмюром [6] була розроблена теорія «плям», у відповідності з якою адсорбовані на поверхні речовини чужорідні атоми створюють диполі, які утворюють подвійний електричний шар товщиною δ з поверхневою поляризацією $n_S\vec{p}$ (n_S – поверхнева концентрація домішкових диполів, $\vec{p}$ – момент окремого диполя). При цьому потенціал виходу зменшується на величину

$$\delta\phi_0 = \frac{n_S\cdot p}{\varepsilon_0}.$$

Однак, локалізація груп диполів у вигляді «плям» приводить до помноження цієї величини на «коефіцієнт покриття» Θ, величина якого може бути як менше, так і більше одиниці. Це обумовлено тим, що фактична площа поверхні тертя з урахуванням рельєфу більше номінальної.

Пов'яжемо поверхневу концентрацію n_S диполів з їх об'ємною концентрацією n_V. Оскільки диполі на поверхні знаходяться у зв'язаному стані, енергія якого характеризується величиною ΔU, при термодинамічній рівновазі повинен мати місце розподіл Больцмана, тобто

$$n_V = n_0 e^{\left(\frac{-\Delta U}{kT}\right)}, \tag{13}$$

де n_0 – приповерхнева об'ємна концентрація частинок зносу, м$^{-3}$;

ΔU – енергія зв'язку частинок зносу з поверхнею, Дж;

k – стала Больцмана, k =*1,38·10*$^{-23}$ Дж/К.

Оскільки поверхнева концентрація n_S частинок зносу пов'язана з їх об'ємною концентрацією n_V співвідношенням $n_S = n_V^{2/3}$, то, підставляючи у рівняння (13) $n_0 = n_S^{3/2}$, отримуємо:

$$n_S = n_V^{2/3}e^{\frac{2\Delta U}{3kT}}.$$

Тоді зміну потенціалу виходу можна представити у вигляді:

$$\Delta\phi = \frac{\Theta\vec{p}}{\varepsilon_0}n_V^{2/3}e^{\frac{2\Delta U}{3kT}},$$

де Θ – коефіцієнт покриття;

$\vec{p}$ – момент окремого диполя, Кл·м.

Зважаючи на це, у рівняння (12) замість ϕ_0 слід підставити:

$$\phi_0' = \phi_0 - \frac{\Theta p}{\varepsilon_0} n_V^{2/3} e^{\frac{2\Delta U}{3kT}}. \tag{14}$$

Розглянемо вплив концентрації частинок зношення на величину діелектричної проникності ε_ω, яка входе до рівняння (12). Залежність ε_ω від об'ємної концентрації n_V досить задовільно описується класичним рівнянням Максвела [7]:

$$\varepsilon_n = \varepsilon \left(1 + \frac{3\omega}{\frac{\nu + 2}{\nu - 1} - \omega} \right), \tag{15}$$

де ν – відношення діелектричної проникності дисперсної фази (частинок забруднень) до діелектричної проникності дисперсного середовища (чистого палива) ($\nu = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$);

ε – діелектрична проникність середовища без включень;

ω – відносна концентрація дисперсної фази, пов'язана з об'ємною концентрацією n_V і середнім розміром $\overline{a}$ дисперсних частинок співвідношенням

$$\omega = n_V \overline{a}^3. \tag{16}$$

При встановленні характеру залежності діелектричної проникності від концентрації частинок домішок треба мати на увазі, що кожна заряджена частинка, яка оточена іонами протилежного знаку, створює кластер, радіус якого дорівнює радіусу дебаєвського екранування. Такий кластер є аналогом неполярної молекули, яка внаслідок поляризації в електричному полі набуває дипольного моменту $\vec{p} = \alpha \vec{E}$, де поляризованість $\alpha = \lambda_D^3$. Величина радіусу дебаєвського екранування [5]:

$$\lambda_D = \frac{1}{2q} \sqrt{\frac{\varepsilon_0 kT}{\pi n_V}}, \tag{17}$$

де q – заряд частинки, Кл.

Діелектрична проникність, що спричинена цим механізмом, визначається з рівняння:

$$\varepsilon' = 1 + 4\pi n_V \alpha. \tag{18}$$

Тоді, зважаючи на рівняння (17) та (18), отримаємо

$$\varepsilon' = 1 + \frac{\pi}{2q^3 \sqrt{n_V}} \left(\frac{\varepsilon_0 kT}{\pi} \right)^{3/2}, \tag{19}$$

враховуючи це, вираз для ν в формулі (15) набуває вигляду:

$$\nu = \frac{1}{\varepsilon_C} \left[1 + \frac{\pi}{2q^3} \left(\frac{\varepsilon_0 kT}{\pi} \right)^{3/2} \frac{1}{\sqrt{n_v}} \right]. \tag{20}$$

Підстановка виразу (20) у (15) з урахуванням (16) могла б дозволити знайти аналітичну залежність ε від n_V, якби заряд q частинок був сталою величиною, однак, відповідно до [5], він є функцією λ_D (2).

Для якісної оцінки залежності $\varepsilon_\omega = f\left(n_V\right)$ можна задатися характерною для дисперсних частинок величиною заряду $\left\langle q \right\rangle \approx 10^{-18}$ Кл [8]. Тоді рівняння, яке виражає у явному вигляді цю залежність, набуває вигляду:

$$\frac{\varepsilon_\omega}{\varepsilon} = 1 + \frac{3}{\frac{1}{n_V \overline{a}^3} \frac{\nu(n_V) + 2}{\nu(n_V) - 1} - 1}, \tag{21}$$

де залежність $\nu\left(n_V\right)$ визначається рівнянням (20).

В залежності від середньої величини заряду $\langle q \rangle$ дисперсних частинок величина ν може бути як більше, так і менше одиниці. При $\langle q \rangle < 10^{-18}$Кл $\nu > 1$, і залежність $\varepsilon_\omega = f(n_V)$ є зростаючою, а при $\langle q \rangle \ge 10^{-18}$Кл ця залежність може мати максимум в зоні великих концентрацій або насичення.

На значення питомої сили тертя σ_{fr}, яка визначається формулою (12), суттєво впливає не тільки об'ємна концентрація, але і розмір a дисперсних частинок забруднень, від якого значно залежить функція розподілу $f(a)$. Одним з найкращих наближень цієї функції до експериментальних даних є формула Нукіяма-Танасави [8], у відповідності до якої

$$f(a) = \gamma a^2 e^{\left(-b \cdot a^\beta\right)}, \tag{22}$$

де γ, b та β – параметри функції розподілу, які визначаються з експерименту.

Таким чином, питома сила тертя з точки зору моделі взаємодії тонкодисперсних частинок зносу і забруднень з поверхнею тертя, що описується рівнянням (12) з урахуванням рівнянь (14), (15) та (22), буде дорівнюватися:

$$\sigma_{fr} = \frac{4\pi h}{u} \int_0^{a_{\max}} \left(\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\delta}\right)^{3/2} \left(1 + \frac{3\omega}{\dfrac{\nu+2}{\nu-1} - \omega}\right)^{3/2} \left(\phi_0 - \frac{\Theta p}{\varepsilon_0} n_V^{2/3} e^{\frac{2\Delta U}{3kT}}\right)^3 \times$$
$$\times \sqrt{\frac{3a}{\rho}} \left(\frac{a}{\delta} + \frac{a}{\lambda_D}\right) n_V \gamma a^2 e^{\left(-ba^\beta\right)} da + \sigma'_{fr}.$$

Висновки

В рівнянні, що отримане, питома сила тертя σ_{fr} досить складним чином залежить як від концентрації ω та n_V частинок домішок, так і від їх розміру a. Крім того, воно містить і деякі невизначені параметри, такі як δ, Θ, ΔU. Зважаючи на цю обставину, аналіз цього рівняння потребує експериментальних досліджень, які могли б дати принаймні якісну оцінку таких величин і, головним чином, виявити вплив параметрів, що залежать від ступеня диспергування (ω, a та ін.) системи, на фізико-механічні процеси, що перебігають у вузлі тертя.

Література

1. Мирзоев, О. Г. Моделирование износа трения узла нефтепромыслового оборудования [Текст] / О. Г. Мерзоев // Современные наукоемкие технологии. Технические науки. – 2012. – №9. – С. 33-34.

2. Носко, А. Л. Математическое моделирование трибологических систем (применительно к тормозным устройствам ПТМ) [Текст] / А. Л. Носко, А. П. Носко // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия «Машиностроение». – 2006. – №1 – С. 83-98.

3. Физические величины [Текст] : Справочник / А. П. Бабичев, Н. А. Бабушкина, А. М. Братковский [и др.] ; под ред. И. С. Григорьева, Е. З. Мелихова. – М. : Энергоатомиздат. 1991. – 1232 с.

4. Березняков, А. И. О влиянии полярных молекул смазочного масла на силу трения [Текст] / А. И. Березняков // Трение и износ. – 2001. – Т. 22, №5. – С. 513-519.

5. Березняков, А. И. Корреляция между электропроводностью масляной пленки и интенсивностью изнашивания [Текст] / А. И. Березняков, Е. С. Венцель, А. А. Бабенко // Трение и износ. – 2001. – Т. 22, №3. – С. 265-270.

6. Langmuir, I. Electron emission from tungsten filaments containing thoria [Text] / I. Langmuir // Physical Review . – 1923. – №22. – С. 357.

7. Петрина, Д. Я. О решении одной классической задачи электростатики с помощью вычитательной процедуры [Текст] / Д. Я. Петрина // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1984. – 24, №5. – С. 709-721.

8. Фукс, Н. А. Механика аэрозолей [Текст] / Н. А. Фукс. – М.: Изд-во Акад. наук СССР, 1955. – 352 с.

Ventsel' E.S., Kravets' A.M. **Mathematical model of tribocoupling**

A mathematical model of the tribocoupling is considered which associates the character of the physical and mechanical processes occurring during the operation with the characteristics of mechanical impurity particles containing in the lubricant l(dispersion degree and concentration). Specific friction force was accepted as a modeled parameter of the tribocoupling. As a result of modeling, friction force and the wear intensity of the tribocoupling were associated with dielectric permittivity of the intervening medium.

It was found that the degree of dispersion of the impurity particles is primarily determined by a parameter of Nukiyama-Tanasawa distribution function. This parameter is growing very strongly with the increase of the degree of dispersion, while the most likely size of the impurity particles does not change significantly.

In the resulting model, the specific friction force depends in a complicated way not only on the concentration of impurity particles in the lubricant and their sizes, but also on a few other parameters, such as a minimum allowed distance from the original particle to the friction surface; "coverage factor"; and the energy of the bound state of dipoles situated on the friction surface. As a result, the analysis of this model requires experimental studies that could provide at least a qualitative estimate of such values, and mainly, determine the influence of the parameters depending on the degree of dispersion of the system on the physical and mechanical processes occurring in the tribocoupling.

In general, growing concentrations of impurity particles should, from the theoretical point of view, result in the increase of specific friction force with the low impurity concentrations values and in the decrease with the quite high concentration values.

Keywords: trybocoupling, model, specific friction force, impurities, dielectric permittivity

References

1. Mirzoev, O. G. Modelirovanie iznosa trenija uzla neftepromyslovogo oborudovanija [Tekst] / O. G. Merzoev // Sovremennye naukoemkie tehnologii. Tehnicheskie nauki. – 2012. – №9. – S. 33-34.

2. Nosko, A. L. Matematicheskoe modelirovanie tribologicheskih sistem (primenitel'no k tormoznym ustrojstvam PTM) [Tekst] / A. L. Nosko, A. P. Nosko // Vestnik MGTU im. N.Je. Baumana. Serija «Mashinostroenie». – 2006. – №1 – S. 83-98.

3. Fizicheskie velichiny [Tekst] : Spravochnik / A. P. Babichev, N. A. Babushkina, A. M. Bratkovskij [i dr.] ; pod red. I. S. Grigor'eva, E. Z. Melihova. – M. : Jenergoatomizdat. 1991. – 1232 s.

4. Bereznjakov, A. I. O vlijanii poljarnyh molekul smazochnogo masla na silu trenija [Tekst] / A. I. Bereznjakov // Trenie i iznos. – 2001. – T. 22, №5. – S. 513-519.

5. Bereznjakov, A. I. Korreljacija mezhdu jelektroprovodnost'ju masljanoj plenki i intensivnost'ju iznashivanija [Tekst] / A. I. Bereznjakov, E. S. Vencel', A. A. Babenko // Trenie i iznos. – 2001. – T. 22, №3. – S. 265-270.

6. Langmuir, I. Electron emission from tungsten filaments containing thoria. [Text] / I. Langmuir // Physical Review . – 1923. - №22. - C. 357.

7. Petrina, D. Ja. O reshenii odnoj klassicheskoj zadachi jelektrostatiki s pomoshh'ju vychitatel'noj procedury [Tekst] / D. Ja. Petrina // Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki. – 1984. – 24, №5. – S. 709-721.

8. Fuks, N. A. Mehanika ajerozolej [Tekst] / N. A. Fuks. – M.: Izd-vo Akad. nauk SSSR, 1955. – 352 s.